11

Lugar geométrico

11.1 DETERMINACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

El *lugar geométrico de los puntos* es el conjunto de puntos, y sólo estos puntos, que satisfacen una condición dada.

Así, el lugar geométrico de los puntos que están a 1 pulgada de un punto dado P es el conjunto de puntos que están a 1 pulgada de P. Estos puntos están sobre un círculo con centro en P y radio 1 pulgada y, por lo tanto, este círculo es el lugar geométrico requerido (Fig. 11-1). Nótese que se muestran los lugares geométricos como figuras con líneas formadas por rayas largas y cortas.

Fig. 11-1

Para determinar un lugar geométrico, (1) especifique que está dado y la condición que se debe satisfacer; (2) encuentre varios puntos que satisfagan la condición, lo que indicará la forma del lugar geométrico; después (3) conecte los puntos y describa completamente el lugar geométrico.

Todas las construcciones geométricas requieren del uso de regla y compás. Por lo que si se va a *construir* un lugar geométrico, se pueden utilizar dichos instrumentos.

11.1A Teoremas fundamentales sobre lugares geométricos

Principio 1: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados, es la mediatriz del segmento de línea que une estos puntos* (Fig. 11-2).

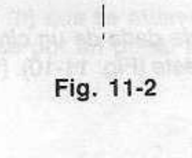


Fig. 11-2

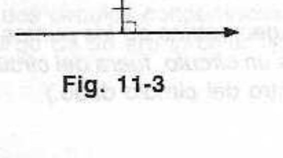


Fig. 11-3

Principio 2: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos paralelas dadas, es una línea paralela a las dos líneas y en medio de ellas* (Fig. 11-3).

Principio 3: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo dado, es la bisectriz del ángulo* (Fig. 11-4).

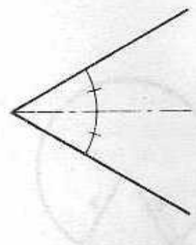


Fig. 11-4

Principio 4: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos líneas dadas que se intersectan, está formado por las bisectrices de los ángulos formados por las líneas* (Fig. 11-5).

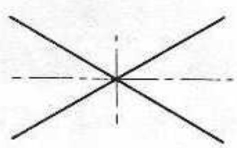


Fig. 11-5

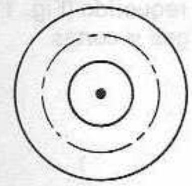


Fig. 11-6

Principio 5: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos círculos concéntricos, es el círculo concéntrico a los círculos dados y a la mitad del camino entre ellos* (Fig. 11-6).

Principio 6: *el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto dado, es un círculo cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es la distancia dada* (Fig. 11-7).

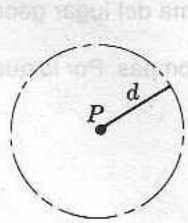


Fig. 11-7

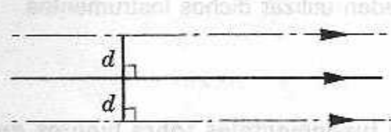


Fig. 11-8

Principio 7: *el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de una línea dada, es un par de líneas paralelas a la línea dada y a la distancia dada de la línea dada* (Fig. 11-8).

Principio 8: *el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un círculo dado cuyo radio es mayor que la distancia, es un par de círculos concéntricos, uno a cada lado del círculo dado y a la distancia dada de éste* (Fig. 11-9).

Principio 9: *el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un círculo dado cuyo radio es menor que la distancia, es un círculo, fuera del círculo dado y concéntrico a éste* (Fig. 11-10). (Si $r = d$, el lugar geométrico incluye también al centro del círculo dado.)

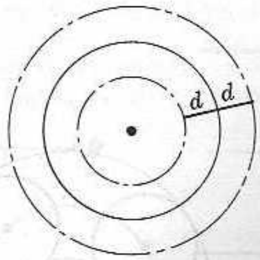


Fig. 11-9

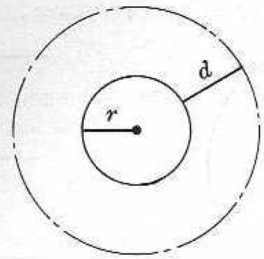


Fig. 11-10

PROBLEMAS RESUELTOS

11.1 DETERMINACIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Determine el lugar geométrico de (*a*) un corredor que se mueve equidistantemente a los lados de una pista recta; (*b*) un avión que vuela equidistantemente a dos baterías antiaéreas separadas; (*c*) un satélite a 100 millas de la superficie de la Tierra; (*d*) el punto de máximo alcance de un cañón con un rango de 10 millas.

Soluciones

Véase Fig. 11-11

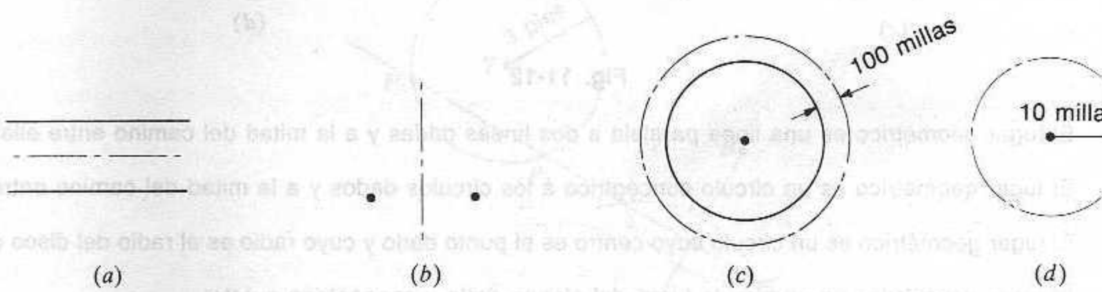


Fig. 11-11

(*a*) El lugar geométrico es una línea paralela a las dos líneas dadas y a medio camino entre ellas.

(*b*) El lugar geométrico es la mediatriz de la línea que une los dos puntos.

(*c*) El lugar geométrico es un círculo concéntrico con la Tierra y de radio 100 millas mayor que el de la Tierra.

(*d*) El lugar geométrico es un círculo de radio 10 millas con centro en el cañón.

11.2 DETERMINACIÓN DEL LUGAR GEOMÉTRICO DEL CENTRO DE UN CÍRCULO

Determine el lugar geométrico del centro de un disco circular (*a*) que se mueve de tal manera que toca a cada una de dos líneas paralelas; (*b*) que se mueve en forma tangencial a dos círculos concéntricos; (*c*) que se mueve de tal manera que su canto pasa por un punto fijo; (*d*) que rueda a lo largo de un aro circular fijo.

Soluciones

Véase Fig. 11-12.

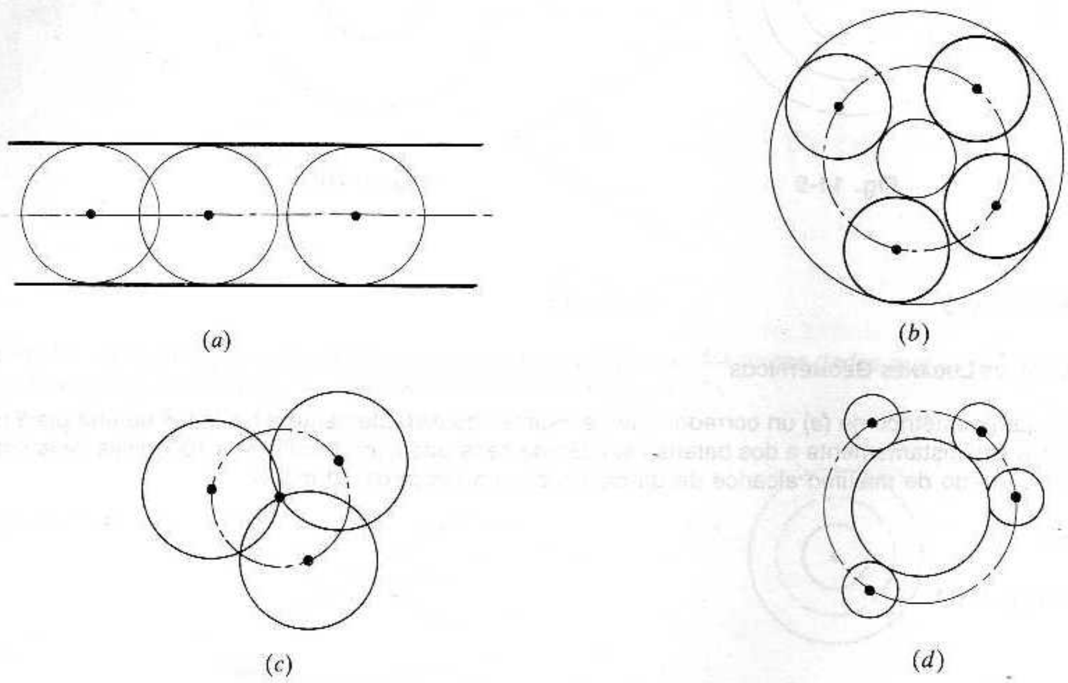


Fig. 11-12

(a) El lugar geométrico es una línea paralela a dos líneas dadas y a la mitad del camino entre ellas.

(b) El lugar geométrico es un círculo concéntrico a los círculos dados y a la mitad del camino entre ellos.

(c) El lugar geométrico es un círculo cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es el radio del disco circular.

(d) El lugar geométrico es un círculo fuera del círculo dado y concéntrico a éste.

11.3 Construcción de un Lugar Geométrico

Construya (a) el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados; (b) el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos líneas paralelas dadas; (c) el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un círculo dado cuyo radio es menor que esa distancia.

Soluciones

Véase Fig. 11-13

11.2 LOCALIZACIÓN DE PUNTOS POR MEDIO DE LA INTERSECCIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS

El punto o puntos que satisfaga dos condiciones puede localizarse trazando el lugar geométrico para cada condición. Los puntos buscados son los puntos de intersección de los dos lugares geométricos.

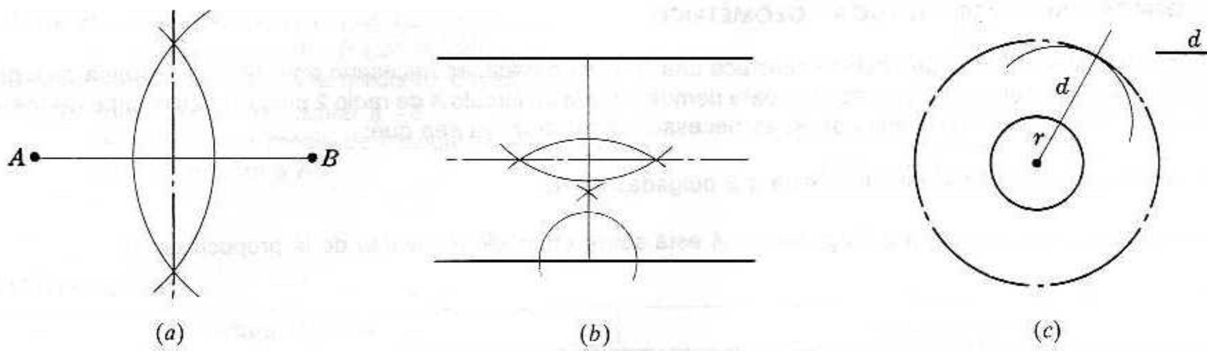


Fig. 11-13

PROBLEMAS RESUELTOS

11.4 LOCALIZACIÓN DE PUNTOS QUE SATISFACEN DOS CONDICIONES

En un mapa localice un tesoro enterrado que está a 3 pies de un árbol (T) que equidista de dos puntos (A y B) en la figura 11-14.

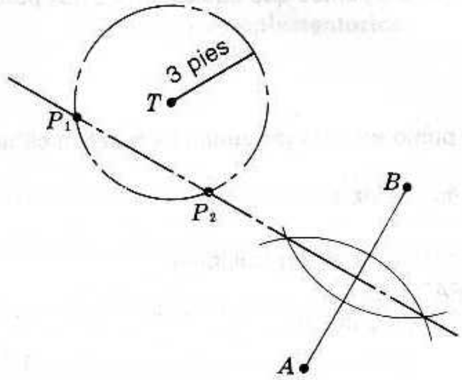


Fig. 11-14

Solución

Los lugares geométricos requeridos son (1) la mediatriz de $\overline{AB}$ y (2) un círculo con centro en T y radio 3 pies. Como se muestra, éstos se intersectan en P_1 y P_2, que son los puntos de ubicación del tesoro.

Nota: El diagrama muestra los dos lugares geométricos que se intersectan en P_1 y P_2. Sin embargo, hay tres posibles clases de soluciones, dependiendo de la localización de T con respecto a A y B:

1. La solución consiste en dos puntos, si los lugares geométricos se intersectan.
2. La solución es de un punto, si la mediatriz es tangente al circulo.
3. La solución no existe, si la mediatriz no intersecta al círculo

11.3 DEMOSTRACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

Para demostrar que un lugar geométrico satisface una condición dada, es necesario demostrar el teorema de lugares geométricos y su converso o su inverso. Así, para demostrar que un círculo A de radio 2 pulgadas es el lugar geométrico de los puntos que distan 2 pulgadas de A, es necesario demostrar, ya sea que:

1. Cualquier punto sobre el círculo A está a 2 pulgadas de A.
2. Cualquier punto que está a 2 pulgadas de A está sobre el círculo (converso de la proposición 1).

o que:

1. Cualquier punto sobre el círculo A está a 2 pulgadas de A.
2. Cualquier punto que no está sobre el círculo A no está a 2 pulgadas de A (inverso de la proposición 1).

Estas proposiciones se demuestran fácilmente utilizando el principio de que un punto está fuera, sobre, o dentro de un círculo de acuerdo a si su distancia desde el centro es mayor que, igual a, o menor que el radio del círculo.

PROBLEMAS RESUELTOS

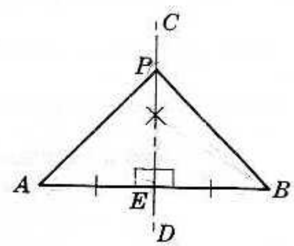
11.5 DEMOSTRACIÓN DE UN TEOREMA SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS

Demuestre que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados es la mediatriz del segmento que une los dos puntos.

Solución

Primero demuestre que cualquier punto en el lugar geométrico satisface la condición:

Dados: puntos A y B. $\overline{CD}$ es la mediatriz $\perp$ de $\overline{AB}$.
Demuéstrese: cualquier punto P sobre $\overline{CD}$ es equidistante a A y B; esto es, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.
Plan: demuéstrese $\triangle PEA \cong \triangle PEB$ para obtener $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

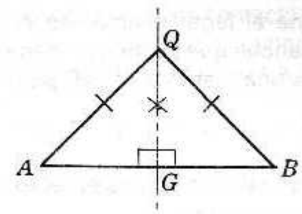


DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{CD}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.	1. Dado.
2. $\angle PEA \cong \angle PEB$	2. Las perpendiculares forman ángulos rectos; todos los ángulos rectos son congruentes.
3. $\overline{AE} \cong \overline{EB}$	3. Bisectar es dividir en partes congruentes
4. $\overline{PE} \cong \overline{PE}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle PEA \cong \triangle PEB$	5. s.a.s. ≅ s.a.s.
6. $\overline{PA} \cong PB$	6. Partes correspondientes de triángulos ≅ son ≅.

Después, demuestre que cualquier punto que satisface la condición está en el lugar geométrico:

Dados: cualquier punto Q que equidista de los puntos A y B ($\overline{QA} \cong \overline{QB}$).
Demuéstrese: Q está en la mediatriz de $\overline{AB}$.
Plan: Trace $\overline{QG}$ perpendicular a $\overline{AB}$ y demuestre, por medio de triángulos congruentes, que $\overline{QG}$ bisecta a $\overline{AB}$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Trace $\overline{QG} \perp \overline{AB}$	1. Por un punto externo se puede trazar una línea perpendicular a una línea dada.
2. $\overline{QA} \cong \overline{QB}$	2. Dado
3. $\angle QGA$ y $\angle QGB$ son $\angle$s rectos; $\triangle QGA$ y $\triangle QGB$ son triángulos rectángulos	3. Las perpendiculares forman ángulos rectos; $\triangle$s con un $\angle$ recto son $\triangle$s rectángulos.
4. $\overline{QG} \cong \overline{QG}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle QGA \cong \triangle QGB$	5. hip.c. $\cong$ hip.c.
6. $\overline{AG} \cong \overline{GB}$	6. Partes correspondientes de triángulos $\cong$ son $\cong$.
7. $\overline{QG}$ bisecta $\overline{AB}$	7. Bisectar es dividir en dos partes congruentes
8. $\overline{QG}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.	8. Una línea perpendicular a un segmento y que lo bisecta es una mediatriz.

Problemas complementarios

1. Determine el lugar geométrico de (11.1)

(*a*) Los puntos medios de las cuerdas de un círculo dado.

(*b*) Los puntos medios de las cuerdas de un círculo dado paralelas a una línea dada.

(*c*) Los puntos medios de las cuerdas de longitud fija en un círculo dado.

(*d*) El vértice de un ángulo recto de un triángulo rectángulo que tiene una hipotenusa dada.

(*e*) El vértice de un triángulo isósceles, que tiene una base dada.

(*f*) El centro de un círculo, que pasa por dos puntos dados.

(*g*) El centro de un círculo tangente a una línea dada en un punto dado sobre esa línea.

(*h*) El centro de un círculo tangente a los lados de un ángulo dado.

2. Determine el lugar geométrico de (11.1)

(*a*) Una lancha que se mueve equidistante a los márgenes paralelos de un arroyo.

(*b*) Un nadador que se mantiene a la misma distancia de dos flotadores.

(*c*) Un helicóptero policiaco en persecución de un coche, el cual acaba de pasar por la unión de dos caminos rectos, y que puede encontrarse en cualquiera de ellos.

(*d*) Un tesoro enterrado a la misma distancia de dos caminos rectos que se intersectan.

3. Determine el lugar geométrico de (*a*) un planeta que se mueve manteniéndose a una distancia fija del Sol; (*b*) una lancha que se mueve manteniéndose a una distancia fija de la costa de una isla circular; (*c*) plantas sembradas a una distancia de 20 pies de una fila recta de otras plantas; (*d*) el extremo exterior de la manecilla de un reloj. (11.1)

4. Si se excluyen los puntos en el exterior del rectángulo *ABCD* en la figura 11-15, identifique el lugar geométrico de los puntos que: (11.1)

(*a*) Equidistan de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

(*b*) Equidistan de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

(*c*) Equidistan de *A* y *B*

(*d*) Equidistan de *B* y *C*

(*e*) Están a 5 unidades de $\overline{BC}$

(*f*) Están a 10 unidades de $\overline{AB}$

(*g*) Están a 20 unidades de $\overline{CD}$

(*h*) Están a 10 unidades de *B*

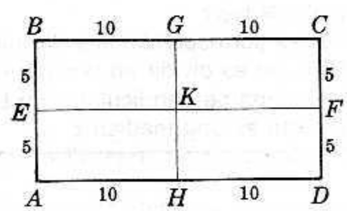


Fig. 11-15

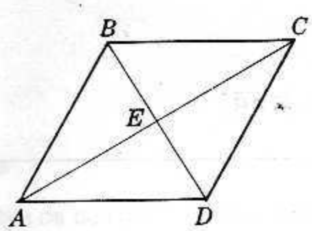


Fig. 11-16

5. Identifique el lugar geométrico de los puntos en el rombo *ABCD* en la figura 11-16 que equidistan de (*a*) $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$; (*b*) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; (*c*) *A* y *C*; (*d*) *B* y *D*; (*e*) cada uno de los cuatro lados.

6. En la figura 11-17, identifíquese el lugar geométrico de los puntos que están sobre o dentro del círculo *C* y (11.1,11.2)

(*a*) A 5 unidades de *O*

(*b*) A 15 unidades de *O*

(*c*) Equidistan de los círculos *A* y *C*

(*d*) A 10 unidades del círculo *C*

(*e*) A 10 unidades del círculo *A*

(*f*) A 5 unidades del círculo *B*

(*g*) El centro de un círculo tangente a los círculos *A* y *C*

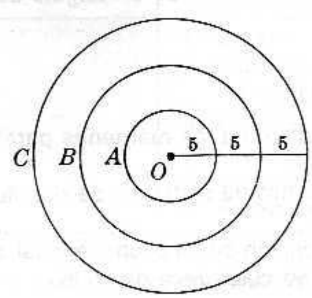


Fig. 11-17

7. Determine el lugar geométrico del centro de (*a*) una moneda que gira y alrededor y está en contacto con una moneda menor; (*b*) una moneda que gira alrededor y está en contacto con una moneda mayor; (*c*) una rueda que se mueve entre dos barras paralelas y está en contacto con ambas; (*d*) Una rueda que se mueve a lo largo de una barra recta de metal y está en contacto con ésta. (11.2)

8. Identifique el lugar geométrico de los puntos que están en el rectángulo *ABCD* de la figura 11-18 y el centro de un círculo (11.2)

(*a*) Tangente a $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

(*b*) Tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

(*c*) Tangente a $\overline{AD}$ y $\overline{EF}$

(*d*) De radio 10, tangente a $\overline{BC}$

(*e*) De radio 20, tangente a $\overline{AD}$

(*f*) Tangente a $\overline{BC}$ en *G*

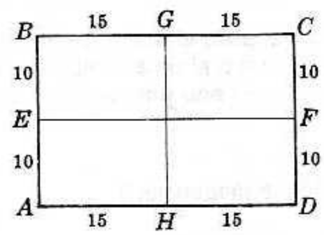


Fig. 11-18

9. Localice cada uno de los siguientes: (11.4)

(*a*) Un tesoro que está enterrado a 5 pies de una cerca recta y es equidistante de dos puntos dados donde la cerca hace contacto con el suelo

(*b*) Los puntos que están a 3 pies de un círculo cuyo radio es 2 pies y que equidistan de dos líneas paralelas entre sí y tangentes al círculo

(*c*) Un punto que equidista de los tres vértices de un triángulo dado

(*d*) Un punto que equidista de dos puntos dados y que equidista de dos paralelas dadas

(*e*) Los puntos que equidistan de dos líneas dadas que se intersectan y están a 5 pies de la intersección

(*f*) Un punto que equidista de los lados de un ángulo y está a $\frac{1}{2}$ de la intersección

10. Localice el punto o puntos que satisfacen las siguientes condiciones con respecto al $\triangle ABC$ en la figura 11-19: (11.4)

(*a*) Equidistan de sus lados

(*b*) Equidistan de sus vértices

(*c*) Equidistan de *A* y *B* y de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

(*d*) Equidistan de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ y están a 5 unidades de *C*

(*e*) Están a 5 unidades de *B* y a 10 unidades de *A*

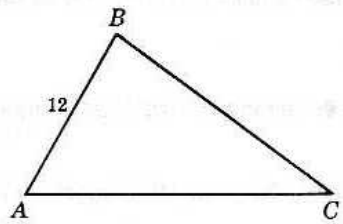


Fig. 11-19

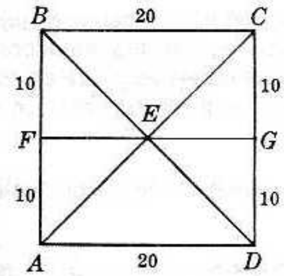


Fig. 11-20

11. Si se excluyen los puntos que están fuera del cuadrado *ABCD* en la figura 11-20, ¿cuántos puntos existen (11.4)

(*a*) equidistantes de sus vértices?

(*b*) equidistantes de sus lados?

(*c*) a 5 unidades de *E* y sobre una de las diagonales?

(*d*) a 5 unidades de *E* y equidistantes de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$?

(*e*) a 5 unidades de $\overline{FG}$ y equidistantes de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$?

(*f*) a 20 unidades de *A* y a 10 unidades de *B*?

12. Demuestre que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo, es la bisectriz del ángulo. (11.5)